

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика  
Динамические системы, эволюционные уравнения,  
экстремальные задачи и математическая кибернетика

Куликов Даниил Владимирович

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ  
ПОТОКОВ МЕГАПОЛИСА

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:  
д. ф.-м. н., профессор И. В. Романовский

Рецензент:  
к. т. н. Л. А. Лосин

Санкт-Петербург

2018

Saint Petersburg State University  
Applied Mathematics and Computer Science  
Dynamical Systems, Evolutionary Equations,  
Extremal Problems and Mathematical Cybernetics

Kulikov Daniil Vladimirovich

TASKS OF MATHEMATICAL MODELLING OF TRAFFIC FLOWS IN MEGACITY

Graduation Project

Scientific Supervisor:

Doctor of Physical and Mathematical  
Sciences, Professor J. V. Romanovsky

Reviewer:

Candidate of Engineering Sciences L. A. Losin

Saint Petersburg

2018

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>Глава 1. Транспортные потоки и их математические модели</b> . . . . .	5
1.1. Макроскопические модели . . . . .	5
1.1.1. Модель Лайтхилла–Уизема–Ричардса (LWR) . . . . .	5
1.1.2. Модель Танака . . . . .	7
1.1.3. Модель Уизема . . . . .	8
1.1.4. Модель Пейна . . . . .	8
1.2. Микроскопические модели . . . . .	9
1.2.1. Модель оптимальной скорости Ньюэлла . . . . .	9
1.2.2. Модель следования за лидером . . . . .	10
1.2.3. Модель Трайбера «разумного водителя» . . . . .	11
<b>Глава 2. Идеи совершенствования транспортных сетей в городах России</b> . . . . .	12
2.1. Модель перестроения транспортных средств между полосами . . . . .	12
2.2. Модель светофора с изменением длительности фаз работы . . . . .	15
2.3. Корректировка фаз работы смежных светофоров . . . . .	19
2.4. Расчет оптимальной скорости движения до следующего перекрестка . . . . .	25
<b>Глава 3. Программная реализация моделей на реальных данных</b> . . . . .	32
3.1. Тестирование моделей на участках дорожной сети Санкт-Петербурга . . . . .	32
3.2. Результаты применения методов улучшения пропускной способности . . . . .	39
3.3. Актуальные задачи моделирования транспортных потоков . . . . .	39
<b>Заключение</b> . . . . .	41
<b>Литература</b> . . . . .	42

# Введение

В настоящее время, несмотря на развитие современных технологий, остаются нерешенными простые проблемы, с которыми мы встречаемся буквально каждый день. К одной из таких проблем относится управление системой автотранспорта и дорожными сетями населенных пунктов. Транспорт — едва ли не главная основа жизни современного города, касающаяся абсолютно каждого его жителя, достаточно лишь перечислить его функции: начиная со связи с жизненноважными пунктами, такими как больницы, полицейские и пожарные участки, а также доставки продовольствия и необходимых товаров, и заканчивая простой поездкой на работу, учебу или место отдыха, которая должна занимать как можно меньшее количество времени. Без хорошо отлаженной дорожной системы жизнь города сейчас не представляется возможной. Для понимания сложности самой задачи оптимизации транспортных потоков стоит перечислить ряд проблем, периодически возникающих в дорожной сети: прокладка новых дорог и соответствующие изменения в распределении транспортной нагрузки смежных секторов [1], своевременный ремонт и расширение дорожного покрытия с временными затруднениями при проезде [2], задание графика движения общественного транспорта для участков проектирования новых деловых, общественных или жилых центров [3], оптимизация движения на существующих участках [4], притом список этих практических задач можно продолжать ещё долго. Если в небольших городах, насчитывающих менее пятидесяти дорог, описание такой системы ещё не кажется труднореализуемым, то для дорожной сети мегаполиса это становится серьезной задачей, для решения которой требуются специальные системы управления, основанные на моделях и алгоритмах математического моделирования транспортных потоков. При этом сами модели должны быть достаточно точны и требуют учета большого количества факторов, к примеру таких как погодные условия, время суток, плотность потока, состояние дорожного покрытия и самого транспортного средства, в связи с чем вычисления становятся чрезвычайно трудными. Отсюда следует актуальность составления и рассмотрения практических аспектов, а также математического и программного решения задач моделирования транспортных потоков мегаполиса, которые будут рассмотрены в данной работе.

**Цель работы.** Изучение существующих математических моделей транспортных потоков, исследование актуальных задач по оптимизации дорожного движения, разра-

ботка собственных алгоритмов для решения рассмотренных задач, применение алгоритмов на реальных участках в крупном городе России.

**Методы реализации.** Для реализации предложенных алгоритмов написаны соответствующие программы на языке программирования C# в среде разработки Microsoft Visual Studio 2010, вспомогательные вычисления производились в Matlab 2011 и Microsoft Office Excel 2010 с использованием макросов на Visual Basic for Applications, схемы и диаграммы оформлялись с помощью онлайн-сервиса draw.io и средства создания диаграмм Microsoft Office Excel 2010.

**Структура работы.** Работа состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографии.

**В первой главе** рассмотрены различные макроскопические и микроскопические математические модели транспортных потоков, позволяющие рассчитывать загруженность дорожно-транспортных сетей. Разобраны основные принципы их применения и существенные различия между ними.

**Во второй главе** рассматриваются различные задачи, а также идеи по улучшению системы дорожных сетей Санкт-Петербурга и других крупных городов России. Рассмотрена задача о влиянии перестроений на плотность автотранспортных средств перед светофором, результаты которой в дальнейшем применены при расчете оптимального режима работы светофора. Изучены различные виды взаимосвязей между светофорами на контролируемом участке дороги, предложены формулы для расчета оптимального совместного режима работы и минимизации образования затора перед перекрестком. Предложена модель расчета оптимального движения транспортного потока на участке дорожной сети и её реализация на программном уровне.

**В третьей главе** объясняется практическое применение методов, рассмотренных во второй главе, на основе участков дорог в пригороде и центре Санкт-Петербурга. Демонстрируются результаты, существенно улучшающие движение на заданных участках, а также данные, по которым тестировалась написанная программа, и её реализация. В конце главы разобраны прочие актуальные идеи, условия и критерии разработки современных программ по моделированию транспортных потоков в условиях крупных городов и мегаполисов.

# Транспортные потоки и их модели

В связи с ростом технологического прогресса в крупных городах наблюдается сильный рост количества как личных автомобилей, так и в целом наземного транспорта, что со временем приводит к переполненности транспортной сети и грозит полным транспортным коллапсом. Во избежание такой проблемы были придуманы различные математические модели, описывающие поведение на дороге как отдельных автомобилей, так и их группы, получившей название транспортный поток. Условно такие модели можно разделить на два типа: макроскопические (гидродинамические) и микроскопические (следование за лидером) [5].

Далее будут разобраны различные виды моделей этих двух типов.

### 1.1. Макроскопические модели

В макроскопических моделях основной идеей выступает сравнение транспортного потока с жидкостью с определенной мотивацией. Данная идея связана с тем, что транспортный поток, так же, как и жидкость, имеет зависимость между скоростью потока и его плотностью [6]. Транспортный поток можно описать с помощью закона сохранения и найти решение соответствующей ему задачи Коши [7]. Полученное обобщенное решение позволяет описать состояния транспортного потока и рассмотреть переходы между ними. Развитие этих моделей началось с модели Лайтхилла–Уизема–Ричардса, которая будет разобрана далее.

#### 1.1.1. Модель Лайтхилла–Уизема–Ричардса (LWR)

Первой макроскопической моделью транспортного потока можно по праву считать модель Лайтхилла–Уизема–Ричардса (сокращенно LWR) [8], которая впервые появилась в работах 60-ых годов прошлого века, что говорит об относительной «молодости» данных моделей с точки зрения истории. Появление данной транспортной модели можно назвать случайным и первоначально оно было связано с решением уравнений закона сохранения для сжимаемой жидкости [9]. В дальнейшем данная жидкость стала рассматриваться как поток автотранспортных средств, что и привело к интерпретации

данной задачи с точки зрения транспортных потоков.

Для данной модели делается несколько предположений:

1. Обозначим через  $v(t, x)$  скорость потока, а за  $\rho(t, x)$  — его плотность. Уравнение состояния устанавливает однозначную зависимость между ними;
2. Должен выполняться закон сохранения массы для количества автотранспортных средств.

Далее разберемся с основными понятиями, введенными в предположениях. Плотность  $\rho(t, x)$  будем трактовать как количество автотранспортных средств на определенном участке в некоторый момент времени  $t$ , а аргумент  $x$  будет указывать расположение данного участка. В свою очередь,  $v(t, x)$  будет означать скорость данных автотранспортных средств на промежутке дороги в области с координатой  $x$  в заданный момент времени  $t$ .

Стоит учесть, что макроскопические модели описывают поведение потока АТС на достаточно крупных участках (начиная от ста метров, то есть кортежи из большого количества автомобилей) [10]. Если же нужно будет учесть поведение какого-то конкретного автомобиля и изучить его более подробно (учёт расстояния до впереди идущего транспорта, погодных условий и так далее), то будут использоваться микроскопические модели, которые будут рассмотрены в данной работе чуть позднее. При этом существует возможность аппроксимировать макроскопическую модель с помощью микроскопических [11]. На практике же принято рассматривать именно макроскопические модели ввиду упрощенных вычислений и простых алгоритмов их исследования [12].

Предположение 1, касающееся уравнения состояния, выразим следующим условием, представленным ниже:

$$v(t, x) = V(\rho(t, x)). \quad (1.1)$$

Поскольку скорость АТС понижается при увеличении количества АТС на определенном промежутке дороги, то значение функции  $V(\rho)$  убывает, а значит  $V'(\rho) < 0$ . Также обозначим через  $Q(\rho) = \rho V(\rho)$  интенсивность потока автотранспортных средств, другими словами, количество автомобилей, которые проезжают заданный участок дороги в определенный момент времени.

Предположение 2 будет выражаться законом сохранения количества автотранс-

портных средств [13]:

$$\int_a^b \rho(t + \Delta, x) dx - \int_a^b \rho(t, x) dx = - \int_t^{t+\Delta} Q(\rho(\tau, b)) d\tau + \int_t^{t+\Delta} Q(\rho(\tau, a)) d\tau. \quad (1.2)$$

Таким образом, для прямоугольного контура  $\Omega$  с параллельными сторонам осями следует, что  $\int_{\Omega} \rho(t, x) dx - Q(\rho(t, x)) dt = 0$ .

Притом данное соотношение будет справедливо и для произвольного кусочно-гладкого контура  $\Omega$ . Если добавить к уравнению на точки гладкости  $\rho(t, x)$ , то есть:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(V(\rho)\rho)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

начальное условие типа Римана, то получим задачу Коши, которую можно решить. Например, таким образом можно определить, как быстро участники движения поймут, что по их маршруту следования образовался затор [14].

Модель LWR, в связи с её большой популярностью, породила несколько моделей с дополнительными условиями, например модели Танака, Уизема и Пейна.

### 1.1.2. Модель Танака

Моделью Танака называют LWR-модель, в которой уравнение состояния  $V(\rho)$  определяется с учетом дополнительных условий. Предположим, что мы рассматриваем однополосный поток. Ограничим скорость данного потока некоторым значением, которое обозначим как  $V_{\max}$ , что соответствует ограничениям на скорость движения машин внутри города или за ним. Тогда определим плотность

$$\rho(v) = 1/d(v), \quad (1.4)$$

где

$$d(v) = L + c_1 v + c_2 v^2 \quad (1.5)$$

будет задавать безопасное расстояние между двумя автотранспортными средствами при определенной скорости потока  $v$  (то есть учитывать возможность безопасного экстренного торможения). В данной формуле  $L$  определяет среднестатистическую длину кузова автомобиля,  $c_1$  — время реакции при экстренной ситуации у водителя, а  $c_2$  — коэффициент, определяющий длину тормозного пути, который зависит от состояния асфальта и прочих погодных условий (дождь, туман, гололёд и так далее). В связи с важностью учета данных условий эта модель в настоящее время получила широкое практическое применение [15].



### 1.1.3. Модель Уизема

Модель Уизема, в отличие от предыдущих рассмотренных моделей, дополнительно ставила во внимание тот факт, что водители, находясь в пути, инстинктивно уменьшают скорость движения, если видят вдалеке скопление автотранспортных средств или затор, и увеличивают скорость вплоть до максимально разрешенной на участке, если дорога перед ними свободна [16]. Для реализации данного условия движения и учета «зрения» водителя вводится специальный параметр  $D(\rho) > 0$ . Таким образом уравнение (1.1) записывается уже в следующем виде:

$$v(t, x) = V(\rho(t, x)) - \frac{D(\rho(t, x))}{\rho(t, x)} \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x}. \quad (1.6)$$

Описывается эта модель с помощью уравнения типа Бюргерса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \quad (1.7)$$

### 1.1.4. Модель Пейна

Далее рассмотрим ещё одну важную модель — модель Пейна. Основное отличие данной модели заключается в том, что скорость, с которой движется автотранспортное средство будет регулироваться некоторой «желаемой» скоростью, к которой будет стремиться водитель [17]. Для данной модели уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} v = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\tau} \left( v - \left( V(\rho) - \frac{D(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right), \quad (1.8)$$

где параметр  $\tau$  описывает скорость стремления к желаемой скорости движения автотранспортного средства.

В связи с тем, что транспортный поток в данном случае обладает «мотивацией», основное различие между транспортным потоком и его гидродинамическим аналогом заключается лишь в правых частях данных уравнений, а значит можно использовать уже известные алгоритмы расчетов и вычислений для соответствующих жидкостей.

К сожалению, данная модель подверглась серьезной критике, в статье [18] были найдены существенные недостатки, такие как появление отрицательной скорости и слишком близкое движение автомобилей друг к другу, приводящее к неизбежной аварийной ситуации.

Со временем данные проблемы были частично решены в работах [19], [20]. Стоит отметить, что на данный момент существует больше ста макроскопических моделей,

каждая из которых вносит свои корректировки или улучшения в рассмотренные выше модели.

Теперь перейдем к рассмотрению микроскопических моделей, которые будут связаны с уже изученными макроскопическими моделями.

## 1.2. Микроскопические модели

В микроскопических моделях, в отличие от макроскопических, транспортный поток рассматривается с точки зрения взаимодействия между несколькими отдельными машинами, а не целой группы. Основным интересом данных моделей является описание поведения и движения одной конкретной машины в зависимости от остальных автотранспортных средств в потоке. В данном разделе опишем различные модели, в том числе модели оптимальной скорости и следования за лидером, а также одну из наиболее популярных в последнее время — модель Трайбера «разумного водителя».

### 1.2.1. Модель оптимальной скорости Ньюэлла

Предположим, что мы можем пронумеровать автотранспортные средства в автомобильном потоке в порядке их следования друг за другом. Пусть  $s_n(t)$  задаёт координату центра определенной  $n$ -ой машины в потоке в заданный момент времени  $t > 0$ . Тогда положим, что

$$h_n(t) = s_{n+1}(t) - s_n(t), \quad (1.9)$$

$$v_n(t) = s'_n(t).$$

Основной идеей данной микроскопической модели является предположение о том, что каждый водитель, находящийся в потоке, будет держать безопасную, по его мнению, дистанцию до впереди идущей машины, которую можно назвать лидером движения. Данную дистанцию можно описать с помощью следующего уравнения:  $h_n(t+\tau) = V(1/h_n(t))$ , где параметр  $\tau$  определяет время реакции водителей, необходимое для принятия решения об ускорении или замедлении движения. В каждой стране есть определенные цифры, указывающие данное время реакции водителей, но его можно и рассчитать, воспользовавшись формулой  $\tau = -\frac{L}{Q'(\rho_{\max})}$ , где  $L$  определяет среднестатистическую длину кузова автомобиля. При этом, стоит отметить, что расстояние, которое пройдет автомобиль за время реакции водителя  $\tau$  не может превышать длину пути  $1/\rho - L$ , ина-

че это приведет к дорожному происшествию. Отсюда следует возможность описания поведения потока с помощью формулы:

$$V(\rho) = \frac{1/\rho - L}{\tau}. \quad (1.10)$$

Учитывая это условие и проведя несколько преобразований, получим систему:

$$\begin{cases} v + (v_t + vv_x)\tau \simeq V(\rho) + \frac{V'(\rho)}{2\rho}\rho_x \\ \rho_t + (v\rho)_x \simeq 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Стоит обратить внимание, что в итоге преобразований мы получили модель Пейна. Если при этом поставить условие  $\tau = 0$ , то получится модель Уизема, а если ещё и пренебречь малым слагаемым  $\frac{V'(\rho)}{2\rho}\rho_x$  в сравнении с  $V(\rho)$ , то и вовсе модель Лайтхилла–Уизема–Ричардса. Таким образом, прослеживается очевидная взаимосвязь между макроскопическими и микроскопическими моделями.

### 1.2.2. Модель следования за лидером

Следующим видом микроскопических моделей, которые мы рассмотрим, станут модели следования за лидером.

Впервые данный тип модели был предложен в 60-ых годах прошлого столетия и основной его идеей стало ускорение автотранспортного средства в зависимости от лидера — машины, идущей перед ним. Таким образом наблюдаемый транспорт как бы «прицеплялся» к предшествующему ему автомобилю в потоке [21]. При таком движении ускорение  $s''_n(t)$  некоторого автомобиля  $n$  можно было описать с помощью данной формулы:

$$s''_n(t + \tau) = \alpha \frac{s'_{n+1}(t) - s'_n(t)}{s_{n+1}(t) - s_n(t)}. \quad (1.12)$$

В этой модели прослеживается прямая пропорциональность  $\Delta v_n(t) = s'_{n+1}(t) - s'_n(t)$  с коэффициентом, а также обратная пропорциональность разности расстояния до лидера  $h_n(t) = s_{n+1}(t) - s_n(t)$ . В таком случае эту микроскопическую модель можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial v_n(t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} \log h_n(t). \quad (1.13)$$

В результате получим уравнение состояния транспортного потока  $V(\rho) = \alpha \ln(\rho_{\max}/\rho)$ , где  $\rho > 1/L$ , обусловленное зависимостью от лидера потока и стремлением поддерживать подходящую дистанцию следования.

### 1.2.3. Модель Трайбера «разумного водителя»

Поскольку рассмотренные выше модели получили широкое практическое применение, была предпринята попытка объединить оба типа моделей в одну общую микроскопическую модель. Так появилась микроскопическая модель разумного водителя, описываемая следующим уравнением ускорения АТС:

$$s_n''(t) = F(s_{n+1}(t) - s_n(t), s_{n+1}'(t) - s_n'(t), s_n'(t)). \quad (1.14)$$

Среди них выделяется модель Трайбера:

$$s_n''(t) = a_n \left( 1 - \left( \frac{s_n'(t)}{V_n^0} \right)^\delta - \left( \frac{d_n^*(s_n'(t), s_{n+1}'(t) - s_n'(t))}{s_{n+1}(t) - s_n(t)} \right)^2 \right), \quad (1.15)$$

где  $d_n^*$  — функция, определяющая дистанцию, к которой стремится водитель,  $V_n^0$  — оптимальная скорость движения, а  $\delta$  — параметр, отвечающий за характер разгона АТС. Данная модель получила известность благодаря тому, что в ней уравнение ускорения включает два слагаемых: одно из них описывает ускорение автомобиля при возможности свободного движения по дорожной полосе, в то время как второе слагаемое описывает вынужденное торможение при движении за идущей впереди машиной. Поэтому эти слагаемые можно отнести к типам микроскопических моделей, описанных ранее в работе. Сочетание этих двух моделей в одной позволяет математически задать «разумное» поведение автомобилиста на дороге и максимально приблизить моделируемые значения к реальным.

Использование этих моделей поможет решить различные реальные транспортные задачи, то есть задачи, возникающие в конкретных ситуациях: рассасывание затора [22], проезд светофора, перестроение между полосами, объезд препятствий, ремонтирование дорог и так далее.

Некоторые из таких задач будут рассмотрены в следующей главе.

# Идеи совершенствования транспортных сетей в крупных городах России

В данной главе будут разобраны различные задачи математического моделирования транспортных потоков, актуальные для оптимизации и уменьшения загруженности дорожных сетей крупных городов и мегаполисов.

По личному опыту вождения автомобиля хочу заметить, что большая загруженность транспортной сети является следствием позднего перестроения водителей, а также постоянной длительности работы фаз светофора и неумения участников дорожного движения подстраиваться под них. Водители, совершающие поздний маневр, заставляют остальных участников дорожного движения снижать скорость, что приводит к так называемой подвижной пробке. Светофоры, работающие одинаково вне зависимости от времени суток или дня недели, тоже приводят к образованию пробок, поскольку потоки в разное время могут иметь совершенно разную интенсивность и даже направление. Так в будние дни утром водители направляются на работу, на место учебы, расположенное в основном в центральной части города, а вечером наоборот возвращаются в окружные, «спальные» районы. Для решения этих проблем в этой главе будет уделено особое внимание соответствующим задачам и они будут рассмотрены более подробно.

## 2.1. Модель перестроения транспортных средств между полосами движения

Учитывая малую ширину улиц в центральной части города, в качестве примера возьмем типичную двухполосную однонаправленную дорогу.

Изучим движение автотранспортных средств по дорожному участку при приближении к светофору. Для этого введем эйлерову систему координат  $x$  вдоль проезжей части в направлении движения потока и соответствующее время движения  $t$ . Среднюю плотность потока  $\rho(x, t)$  можно будет вычислить по следующей формуле

$$\rho(x, t) = \frac{S_x}{S}, \quad (2.1)$$

где  $S_x$  — площадь занятого машинами участка, а  $S$  — общая площадь рассматриваемо-

го участка дороги. Теперь определим  $S_x = hnl$ , где  $h$  — ширина одной полосы данной в задаче дороги,  $n$  — общее количество транспортных средств, находящихся на рассматриваемом участке, а  $l$  — среднее значение длины кузова автомобилей. В свою очередь  $S = hL$ , где  $L$  — длина контрольного участка дороги. Отсюда следует формула:

$$\rho(x, t) = \frac{S_x}{S} = \frac{hnl}{hL} = \frac{nl}{L}. \quad (2.2)$$

Стоит отметить, что введенная плотность имеет границы и изменяется в интервале от 0 до 1 включительно.

Допустим, что движение транспортного потока регулируется светофором, находящимся в конце контрольного участка, как показано на рисунке 2.1. Обозначим через  $x_s$  — координату места расположения данного светофора. Основным параметр работы светофора — это длительность фаз работы его сигналов. Для простоты задачи возьмем двухфазный светофор с двумя цветами сигналов: зеленым и красным, и соответствующими длительностями фаз работы  $t_1$  и  $t_2$ . Зеленый сигнал будет разрешать проезд по обоим полосам движения, тогда как красный будет полностью запрещать движение.

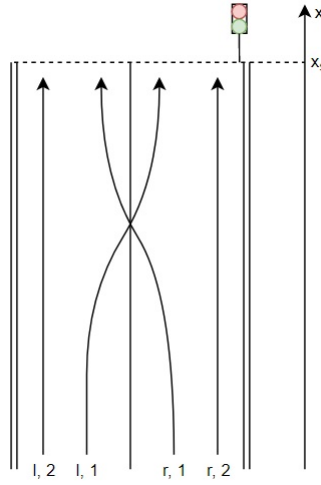


Рис. 2.1. Дорожная полоса и перестраивающиеся потоки АТС

Допустим, что в начальный момент времени АТС, которые должны проехать светофор в обоих рядах, распределены равномерно между полосами движения. В таком случае определим плотность потока для каждой полосы как  $\rho_k(x) = \rho_{1,k} + \rho_{2,k}$ , при этом  $x$  определяет координату на полосе движения,  $\rho_{1,k}$  — плотность АТС, собирающихся продолжить движение прямо без перестроения, и  $\rho_{2,k}$  — плотность АТС, которые будут перестраиваться в соседний ряд до момента достижения светофора. Такое явление часто встречается в связи с обязательством водителя поворачивать налево или направо из

соответствующего крайнего ряда движения, если дорожными знаками не предписаны другие полосы для поворота. Тогда можно составить уравнения баланса для АТС на соседних полосах, задав им индексы  $r$  и  $l$ :  $l$  для машин, движущихся из левого ряда в правый и  $r$  — из правого ряда в левый. Тогда уравнения баланса будут иметь вид:

$$\frac{\partial \rho_{1,r}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{1,r} v_r)}{\partial x} = \omega_{r,l}(\rho_{2,l}, \rho_r), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \rho_{2,r}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{2,r} v_r)}{\partial x} = -\omega_{l,r}(\rho_{2,r}, \rho_l), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho_{1,l}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{1,l} v_l)}{\partial x} = \omega_{l,r}(\rho_{2,r}, \rho_l), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \rho_{2,l}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{2,l} v_l)}{\partial x} = -\omega_{r,l}(\rho_{2,l}, \rho_r). \quad (2.6)$$

Здесь за  $\omega_{i,j}$  обозначим перестраивающийся поток транспорта из полосы  $j$  на полосу  $i$ .

Стоит учесть, что не всегда перестроение вообще является возможным. Поэтому необходимо определить несколько условий для перестроения АТС между полосами.

Если  $v_k t_{change} + L_{change} > x_s - x$ , где  $t_{change}$  — время, затрачиваемое на перестроение, а  $L_{change}$  — добавочная безопасная дистанция, то требуется выполнить перестроение. Это условие связывает возможность перестроения с расстоянием до светофора.

Если же первое условие не будет выполнено, то стоит учесть второе условие:  $\rho_k(x_s > x_{car} > x) > \rho_{change}$ , где  $\rho_{change}$  — это граничная плотность АТС на полосе перестроения. Данное условие связывает действия водителя с наблюдаемой плотностью при подъезде к светофору.

В случае, когда выполнены условия, можно определить  $\omega_{i,j}$  по следующей формуле, где параметр  $\delta_{change}$  определяет интенсивность потока:

$$\omega_{i,j} = \frac{(\rho_{2,j}(1 - \rho_i))^{\delta_{change}}}{t_{change}} \quad (2.7)$$

При этом уравнения изменения скорости АТС, совершающих движение по полосам дороги, можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} = -\frac{k^2}{\rho_{1,l} + \rho_{2,l}} \frac{\partial(\rho_{1,l} + \rho_{2,l})}{\partial x}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{k^2}{\rho_{1,r} + \rho_{2,r}} \frac{\partial(\rho_{1,r} + \rho_{2,r})}{\partial x}, \quad (2.9)$$

где  $k$  — скорость распространения возмущений. Стоит отметить, что данная модель перестроений между полосами движения в транспортном потоке верна как в случае движения при небольшом скоплении автомобилей, так и при ситуации, когда перед светофором возникает подвижная пробка.

В результате наблюдается следующая закономерность: присутствие перестроений в непосредственной близости светофора ведет к падению пропускной способности перекрестка, тогда как заблаговременные перестроения не сильно повлияют на движение. Поэтому для решения этой проблемы стоит запретить перестроения на участке, близком к светофору, а также предупреждать водителей о возможных маневрах на перекресте за достаточное для этого время с помощью предписывающих знаков (на данный момент эти знаки располагаются только в непосредственной близости к светофору, то есть над полосами движения или над светофором).

Теперь, когда рассмотрен вопрос о перестроениях, становится ясным, что пробки перед светофором можно избежать, выполнив переход в соседнюю полосу движения заранее. Однако данное правило не позволяет избежать простоя на красный сигнал светофора. Поэтому далее будет разобрана задача о настройке длительности фаз работы сигналов светофора в зависимости от плотности приходящих потоков.

## 2.2. Модель светофора с изменением длительности фаз работы

Рассмотрим модель крестообразного перекрестка в небольшом городе. Обозначим перекресток как Crossroad, выделим 4 основных направления, как показано на рисунке 2.2. По назначению разобьем районы следующим образом:

- $A$  — деловые районы (офисы, фирмы, магазины);
- $B$  — государственные учреждения (школы, поликлиники);
- $C$  — места отдыха (парки, дачные поселки, точки питания);
- $D$  — спальные районы (место проживания 70% жителей).

Рассмотрим различные дни недели и время суток, а также соответствующие им приоритетные направления:

- будние дни — утро —  $A$  и  $B$ ; будние дни — вечер —  $C$  и  $D$ ;
- выходные дни — утро —  $C$  и  $D$ ; выходные дни — вечер —  $D$ .



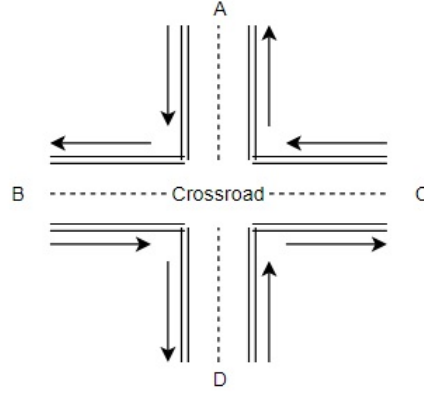


Рис. 2.2. Перекресток Crossroad с различными приоритетными направлениями

Заметим, что преимущественные направления движения меняются достаточно часто, и это следует учитывать при работе светофоров в данных направлениях.

Предположим, что есть светофор с тремя цветовыми сигналами: зеленым, желтым и красным. Обозначим через  $t_g, t_y$  и  $t_r$  длительность наблюдения каждого цвета соответственно. Согласно ГОСТ [23] время работы некоторых фаз светофора фиксировано, так, например, длительность фазы желтого сигнала должна быть равна трем секундам. Отсюда следуют некоторые ограничения, накладываемые на время работы фаз светофора:

1.  $t_y = 3\text{с}$ .
2.  $t_{ry} < 2\text{с}$ .
3.  $t_g > \min\{t_A, t_B, t_C, t_D, t_E\}$ , где в правой части перечислены значения длительности временных интервалов, достаточных для проезда через светофор хотя бы одного транспортного средства определенной категории, которым разрешено движение через данный перекресток.

Эти ограничения позволяют избежать ситуаций, когда времени работы сигнала светофора не хватит для преодоления перекрестка.

Требуется найти числовое значение, отображающее отношение длительностей разрешающего и запрещающего сигнала. Поскольку длительность желтого сигнала нельзя варьировать, то будем рассматривать только отношение зеленого и красного сигналов, которое обозначим как  $k$ . Пусть плотность транспортного потока, приближающегося к светофору, равна  $\rho$ , тогда, согласно макроскопическим моделям, можно рассчитать ско-

рость распространения информации о торможении транспортных средств:

$$\frac{Q(\rho_{\max}) - Q(\rho)}{\rho_{\max} - \rho} = \frac{q}{\rho_{\max} - \rho}, \quad (2.10)$$

где  $\rho_{\max}$  — максимально возможная плотность транспортных средств на данном участке дороги и  $q$  — значение потока АТС.

Тогда можно вычислить количество АТС, которое будет накапливаться за время горения запрещающего сигнала светофора:

$$(\rho_{\max} - \rho) \frac{q}{\rho_{\max} - \rho} t_r = q t_r. \quad (2.11)$$

Для того, чтобы это количество машин не увеличивалось со временем, необходимо, чтобы времени включения зеленого сигнала светофора хватило на пропуск через перекресток всех скопившихся автомобилей, что можно задать данным неравенством:

$$(q_g - q) t_g \geq q t_r \Rightarrow k = \frac{q}{q_g - q}, \quad (2.12)$$

что и определяет значение оптимального отношения зеленого и красного сигналов.

Таким образом, корректируя значение  $k$ , можно устанавливать различные длительности фаз работы светофора, тем самым ускоряя прохождение транспортных потоков в разное время суток в зависимости от приоритетности направления. Решение данной задачи даёт частичный ответ на вопрос об изменении длительности фаз работы светофора, но не учитывает перестроения при подъезде к светофору, что в итоге влияет на важный фактор плотности. Поэтому для грамотной оптимизации конкретного перекрестка следует сначала рассчитать изменение плотностей АТС, возникающих при перестроении, и лишь потом использовать данное отношение.

Можно подвести итог, что для решения проблемы с регулировкой фаз светофора и зависимости плотности потока от текущего времени, следует собрать данные о приоритете направлений для каждого перекрестка, после провести моделирование движения, учитывая возможные перестроения, выбрать значение параметра  $k$ , минимизирующее рост плотности затора перед перекрестком, и внести данные изменения в длительности фаз работы светофора с учетом полученных оптимальных значений.

Рассмотрим перекресток Crossroad, предложенный на рисунке 2.2, и направление из  $D$  в  $A$  утром буднего дня, соответствующее движению автотранспорта из спального района в центр города. Поочередно расположим на данном перекрестке светофоры двух типов: с фиксированными фазами красного и зеленого сигналов и с возможностью

изменения длительности фаз работы. Далее сравним значения плотностей АТС на фиксированном участке дороги при условии применения этих двух типов светофоров. Для наглядности полученные результаты отобразим графически.

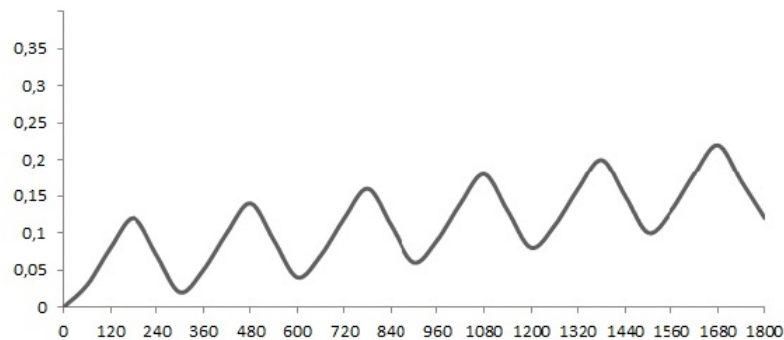


Рис. 2.3. Плотность АТС при работе светофора с фиксированными фазами

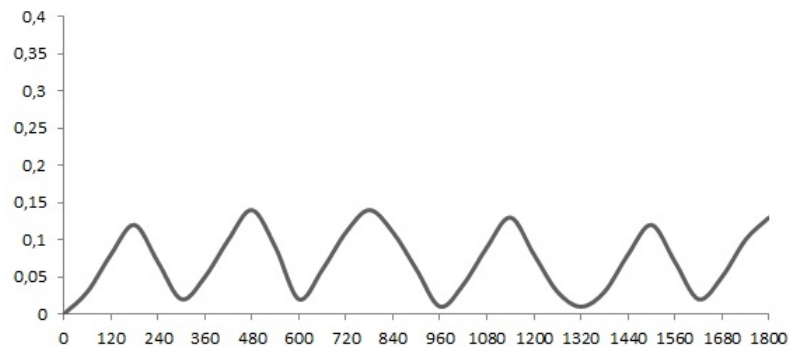


Рис. 2.4. Плотность АТС при работе светофора с регулирующейся длительностью фаз

По данным рисунков 2.3 и 2.4 становится очевидно, что использование светофора с возможностью изменения фаз работы красного и зеленого сигналов приводит к уменьшению плотности автотранспортных средств, скапливающихся перед светофором, а значит и к уменьшению или вовсе полному предотвращению образования пробок и заторов.

Подведем промежуточный итог: для быстрого прохождения перекрестка участниками дорожного движения следует ограничить или предупредить возможность перестроения при условии изменения пропускного времени светофора в зависимости от приоритетных на текущий момент направлений.

## 2.3. Корректировка фаз работы смежных светофоров при внесении изменений

При изменении времени работы одного конкретного светофора не стоит забывать о наличии и последующих светофоров в направлении движения транспортного потока. Стоит учесть, что светофор, работающий по принципу изменения длительности фаз работы будет пропускать больший поток АТС в приоритетном направлении движения. Отсюда следует задача о корректировке фаз работы смежных светофоров для обеспечения быстрого прохождения заданного участка дороги.

Рассмотрим участок дороги, на котором расположено  $n$  светофоров, идущих подряд на заданном расстоянии друг от друга. Перенумеруем данные светофоры в порядке их проезда, начиная от 1 и заканчивая  $n$ . Для каждого светофора определим время работы его сигналов  $t_r, t_g$  и  $t_y$ , задающее красный, зеленый и желтый цвет соответственно. Также следует определить общее время для полного цикла работы светофора  $t_{tot} = t_r + t_g + 2t_y$ . Сначала рассмотрим ситуацию с синхронизацией двух соседних светофоров  $i$  и  $i + 1$ , где  $i \in 1 : n - 1$ , а далее полученные выводы обобщим на весь участок рассматриваемой дороги.

Для случая соседних светофоров дополнительно введем  $t_{\Delta_{i,i+1}}$  равное разности начал циклов работы  $t_{tot}$  светофоров  $i$  и  $i + 1$ . Также определим отношение времени работы зеленого и красного сигналов светофоров  $k_i$ , рассмотренное в предыдущем разделе. Тогда задача сводится к минимизации простоя АТС перед следующим светофором при изменении параметров  $k_i$  и  $t_{tot}$  на рассматриваемом участке дороги. Обозначим общее суммарное время ожидания всех автотранспортных средств на перекрестке как  $t_{stop}$ .

Учитывая значения рассмотренных выше параметров и описав движение потока, можно создать математическую модель для расчета оптимального времени проезда автотранспортных средств. Для описания движения будет необходимо задать следующие параметры:

- $S_{i,i+1}$  — расстояние между светофорами  $i$  и  $i + 1$ ;
- $L$  — средняя длина кузова АТС в потоке;
- $d_{\min}$  — минимальное безопасное расстояние между двумя соседними АТС в потоке,  $d_{\min} > L + d_\tau + d_l$ , где  $d_\tau$  — расстояние, которое пройдет автомобиль за время реакции водителя  $\tau$ , а  $d_l$  — за время торможения в модели следования за лидером;

- $V_{i,i+1}$  — скорость движения АТС на рассматриваемом участке, которую будем считать постоянной;
- $t_{i,i+1}$  — время проезда участка дороги длиной  $S_{i,i+1}$ ,  $t_{i,i+1} = S_{i,i+1}/V_{i,i+1}$ ;
- $t_{safe}$  — интервал безопасного движения между соседними автомобилями, которое можно задать формулой  $t_{safe} = d_{\min}/V_{i,i+1}$ ;
- $a_g$  — количество автомобилей, проехавших светофор за время  $t_g$ .

Рассмотрим различные варианты движения АТС, которые могут возникнуть при проезде светофоров на заданном участке:

**Пример 2.1.** Пусть  $t_{\Delta,i,i+1} \in [t_{i,i+1}; t_{i,i+1} + t_r]$ .

В данном случае все машины, проехавшие светофор  $i$ , приезжают к красному сигналу светофора  $i+1$  и вынуждены ожидать зеленого сигнала и проезда автомобилей, стоящих перед ними, как показано на рисунке 2.5.

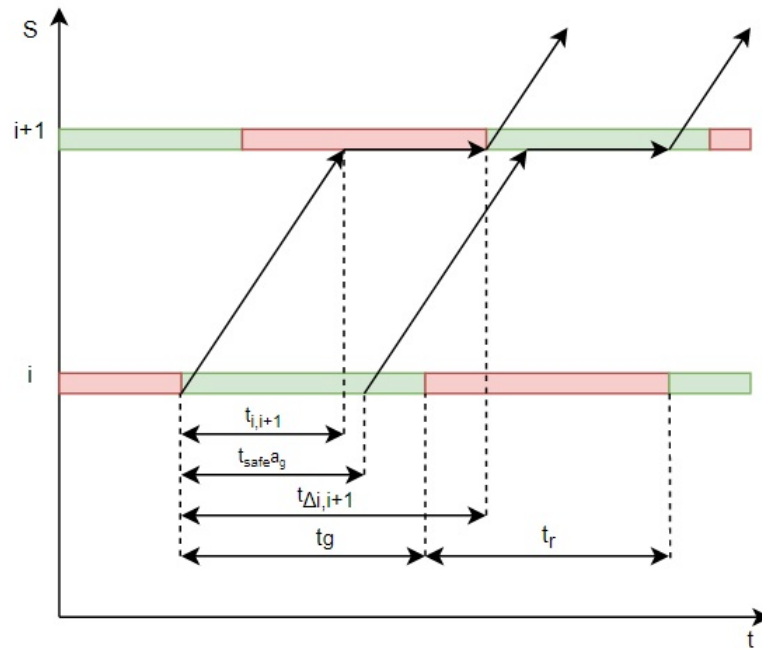


Рис. 2.5. Проезд светофора с прибытием на красный сигнал и простоем

Исходя из данных изображения, становится очевидной формула для вычисления времени простоя автотранспортных средств на светофоре  $t_{stop}$ :

$$t_{stop} = a_g(t_{\Delta,i,i+1} - t_{i,i+1}). \quad (2.13)$$

**Пример 2.2.** Пусть  $t_{\Delta_{i,i+1}} \in [t_{i,i+1} + t_r; t_{i,i+1} + t_r + a_g t_{safe}]$ .

Данная ситуация соответствует случаю, когда только часть автомобилей, находящихся перед светофором, успела проехать перекресток на зеленый сигнал. При этом оставшаяся часть автотранспортных средств продолжает простой на красном сигнале до начала следующего цикла работы.

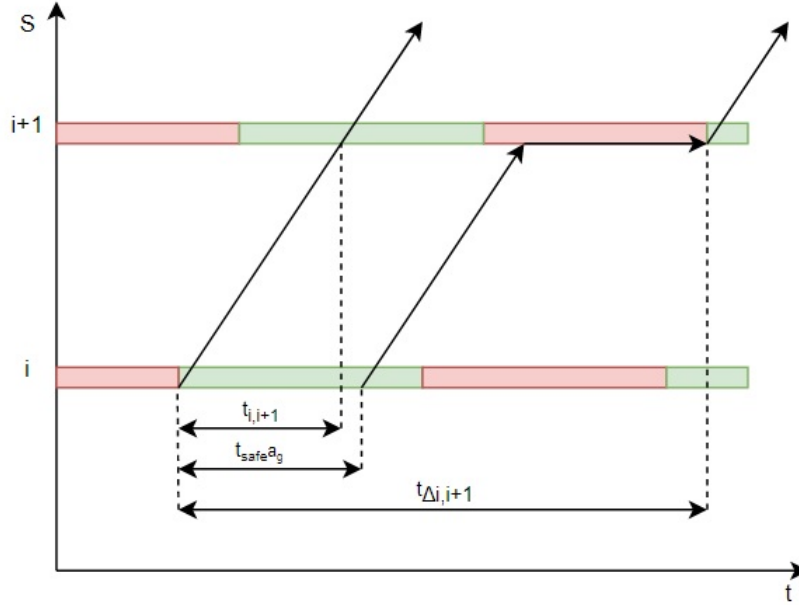


Рис. 2.6. Проезд светофора с частичным простоем

На основе данных рисунка 2.6 можно сделать вывод о формуле для вычисления общего времени простоя  $t_{stop}$ :

$$t_{stop} = a_r t_r, \quad (2.14)$$

где  $a_r$  — количество автомобилей, остановившихся на светофоре  $i + 1$ , которое можно выразить следующим образом:

$$a_r = a_g - \frac{t_{\Delta_{i,i+1}} - t_r - t_{i,i+1}}{t_{safe}}. \quad (2.15)$$

**Пример 2.3.** Пусть  $t_{\Delta_{i,i+1}} \in [t_{i,i+1} + t_r + a_g t_{safe}; t_{i,i+1} + t_{tot}]$ .

В этом варианте разница во времени в циклах работы светофоров попадает в промежуток, достаточный для достижения транспортным потоком следующего светофора, при том, что следующий цикл работы зеленого сигнала светофора  $i + 1$  будет включать время, необходимое для проезда всех автотранспортных средств. Таким образом, последний рассматриваемый временной интервал будет соответствовать событию прямо-

го проезда участка дороги без задержек и простоев на следующем светофоре. Данный случай наглядно демонстрируется на рисунке 2.7:

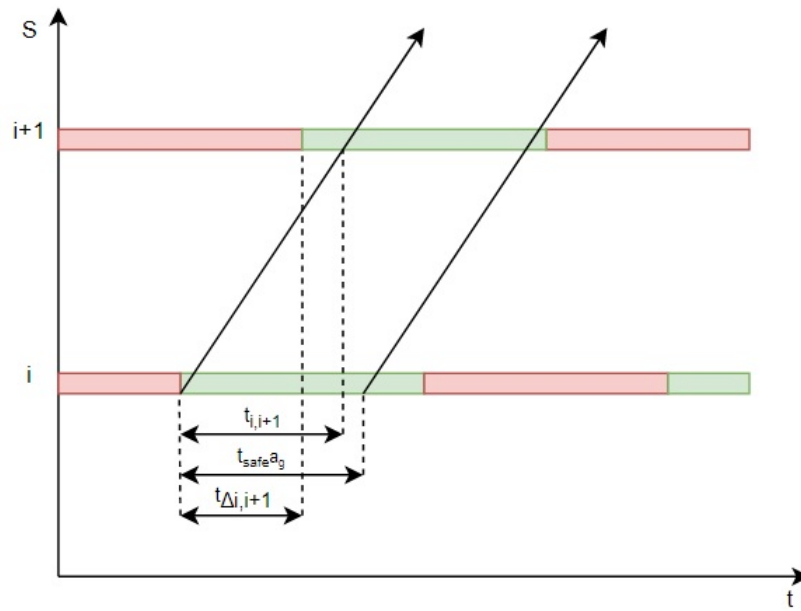


Рис. 2.7. Проезд светофора без простоя

Очевидно, что в рассматриваемом временном интервале простоя на следующем светофоре нет, поэтому время ожидания движения  $t_{stop} = 0$ .

Полученные результаты и зависимость  $t_{stop}$  от  $t_{\Delta i,i+1}$  по формулам 2.13 и 2.14 можно изобразить графически, как показано на рисунке 2.8, при этом максимальное время простоя  $t_{stop}$  будет равно  $a_g(t_{\Delta i,i+1} - t_{i,i+1})$ :

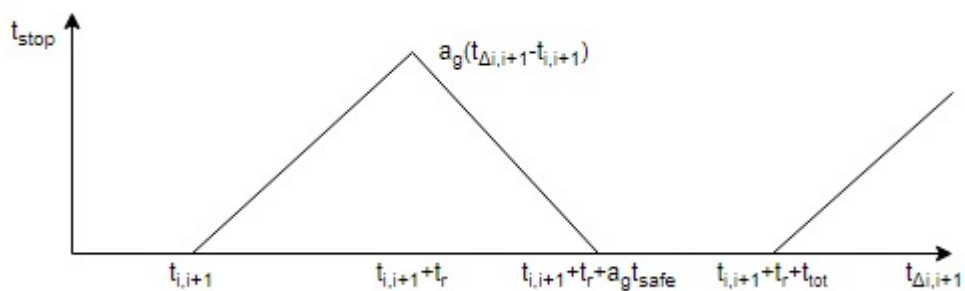


Рис. 2.8. График зависимости  $t_{stop}$  от  $t_{\Delta i,i+1}$

Очевидно, что наилучшим вариантом из рассмотренных будет случай с  $t_{stop} = 0$ . Тогда становится возможным составление алгоритма действий по расчету диапазона значений оптимальной разности во времени работы соседних светофоров для минимизации простоя и заторов перед светофором.

Алгоритм будет состоять из следующих шагов:

1. Определим значение необходимых параметров  $t_{tot}$ ,  $S_{i,i+1}$ ,  $L$ ,  $d_{\min}$ ,  $V_{i,i+1}$ ,  $t_{i,i+1}$ ,  $t_{safe}$ ,  $a_g$ .
2. Рассчитаем значение оптимального параметра  $k$  при фиксированном  $t_{tot}$  по формуле 2.12, рассмотренной ранее.
3. Определим значение  $t_g, t_r$ .
4. Вычислим границы значений  $t_{\Delta_{i,i+1}}$ , внутри которых  $t_{stop}$  будет минимальным.

Данный алгоритм работает для случая рассмотрения только двух соседних светофоров, поэтому полученные выводы стоит обобщить на случай определения работы светофоров на целой улице, участке района или автомагистрали. Приведем пример такого участка, включающего  $n$  светофоров, на рисунке 2.9:

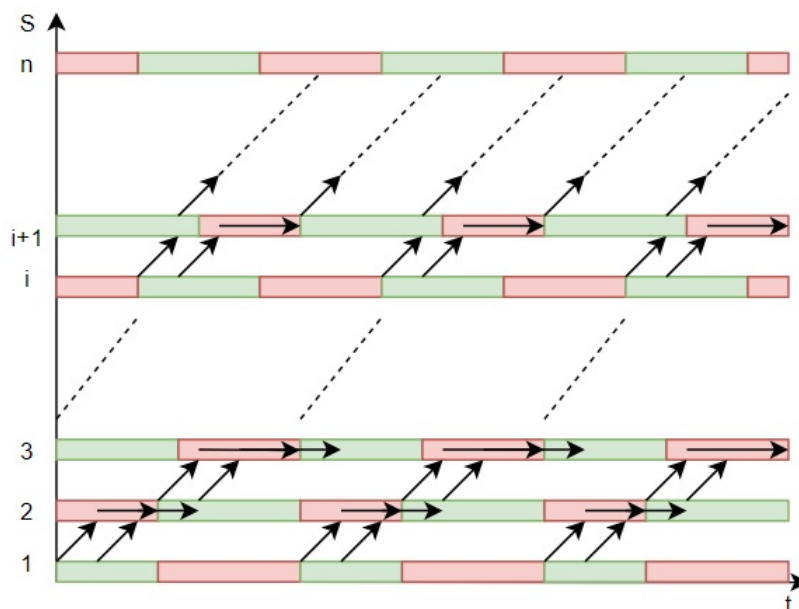


Рис. 2.9. График движения и простоя транспорта на участке дороги

Следует оптимизировать проезд по данному отрезку дороги с целью уменьшения времени простоя автотранспортных средств. По очевидным причинам, нельзя задать одновременное смещение фаз работы всех светофоров на заданном участке, поскольку данное действие приведет к резкому ухудшению дорожной ситуации для автомобилей, которые на тот момент следуют по маршруту.

Следовательно нужно перестраивать работу светофоров постепенно, в несколько этапов. Во-первых, быстрый проезд рассматриваемого отрезка пути будет достигаться установкой одинакового цикла работы всех светофоров, чтобы смещение в разнице



циклов не приводило к дальнейшим заторам. Во-вторых, оптимальная разница в фазах работы должна устанавливаться на протяжении некоторого количества времени во избежание долгого простоя следующих по дороге автомобилей.

Для решения этих проблем потребуется ввести несколько дополнительных переменных:  $t_{tot_i}$  — длина цикла работы светофора  $i$ ,  $t_{corr_i}$  — максимально возможное время смещения фаз работы светофора  $i$ , не приводящее к затору. Теперь можно приступать к созданию алгоритма перенастройки режима работы для большого участка дороги, который будет состоять из следующих шагов:

1. Определить «проблемный» участок дороги  $\{m - 1, m, m + 1\}, m \in 2 : n - 1$ , на котором образуется неподвижная пробка или затор, изучив значения плотностей транспортного потока вблизи светофоров.
2. Рассчитать возможные границы значения  $t_{tot_{opt}} \in [t_{tot_{opt_{min}}}; t_{tot_{opt_{max}}}]$ , где  $t_{tot_{opt}}$  — оптимальная длина цикла работы светофора, при которой возможно задать значение  $k$  по формуле 2.12, при котором не образуется пробка.
3. Измерить длины циклов  $t_{tot_i} \in \mathbb{N}, i \in 1 : n$ . Рассчитать среднее значение, округленное до целого числа секунд,  $\left\lfloor \frac{\sum_{i \in 1:n} t_{tot_i}}{n} \right\rfloor \in \mathbb{N}$ .
  - 3.1. Если  $\left\lfloor \frac{\sum_{i \in 1:n} t_{tot_i}}{n} \right\rfloor \in [t_{tot_{opt_{min}}}; t_{tot_{opt_{max}}}]$ :
    - 3.1.1. Если  $t_{tot_i} > \left\lfloor \frac{\sum_{i \in 1:n} t_{tot_i}}{n} \right\rfloor$ , то значение  $t_{tot_i}$  уменьшить на  $t_\epsilon \leq t_{corr_i}$ .  
Вернуться в начало шага 3.
    - 3.1.2. Если  $t_{tot_i} < \left\lfloor \frac{\sum_{i \in 1:n} t_{tot_i}}{n} \right\rfloor$ , то значение  $t_{tot_i}$  увеличить на  $t_\epsilon \leq t_{corr_i}$ .  
Вернуться в начало шага 3.
    - 3.1.3. Если  $t_{tot_i} - \left\lfloor \frac{\sum_{i \in 1:n} t_{tot_i}}{n} \right\rfloor = 0$ , то перейти к шагу 4.
  - 3.2. Если  $\left\lfloor \frac{\sum_{i \in 1:n} t_{tot_i}}{n} \right\rfloor < t_{tot_{opt_{min}}}$ : увеличить  $t_{tot_i}, i \in 1 : n$  на  $t_\epsilon \leq t_{corr_i}$ .  
Вернуться в начало шага 3.
  - 3.3. Если  $\left\lfloor \frac{\sum_{i \in 1:n} t_{tot_i}}{n} \right\rfloor > t_{tot_{opt_{max}}}$ : уменьшить  $t_{tot_i}, i \in 1 : n$  на  $t_\epsilon \leq t_{corr_i}$ .  
Вернуться в начало шага 3.
4. Используя алгоритм для соседних светофоров, рассмотренный выше, вычислить  $t_{\Delta_{i,i+1_{opt}}}$  — значение  $t_{\Delta_{i,i+1}}$ , при котором  $t_{stop_{i,i+1}}$  минимально.
5. Привести текущие значения  $t_{\Delta_{i,i+1}}, i \in 1 : n - 1$  к оптимальным значениям  $t_{\Delta_{i,i+1_{opt}}}$  по следующему принципу, разбив действия на два цикла:

5.1. В цикле по  $x \in m - 1 : 1$  значения  $t_{\Delta_{x,x+1}}$  поочередно приблизить к  $t_{\Delta_{x,x+1_{opt}}}$  соответственно уменьшив или увеличив его на  $t_{\epsilon} \leq t_{corr_x}$ .

5.2. В цикле по  $y \in m : n - 1$  значения  $t_{\Delta_{y,y+1}}$  поочередно приблизить к  $t_{\Delta_{y,y+1_{opt}}}$  соответственно уменьшив или увеличив его на  $t_{\epsilon} \leq t_{corr_y}$ .

Повторять данный пункт алгоритма до тех пор, пока не будет выполнено равенство  $t_{\Delta_{i,i+1}} = t_{\Delta_{i,i+1_{opt}}}$ ,  $i \in 1 : n - 1$ .

Работу предложенного алгоритма можно объяснить следующей цепочкой действий: сначала ищется проблемный участок, далее циклы работы светофоров приводятся к одинаковому значению, а последующее изменение в их началах можно привести к необходимому оптимальному смещению, проводя его независимым образом в противоположные стороны движения от источника затора.

## 2.4. Расчет оптимальной скорости движения до следующего перекрестка

К сожалению, у рассмотренной в предыдущем разделе модели настройки светофоров есть свои недостатки. Она подходит только для исследования случая движения по главной дороге, при котором автомобили могут проходить на максимально разрешенной скорости без каких-либо задержек. Пример такого участка пути можно привести графически, как показано на рисунке 2.10:

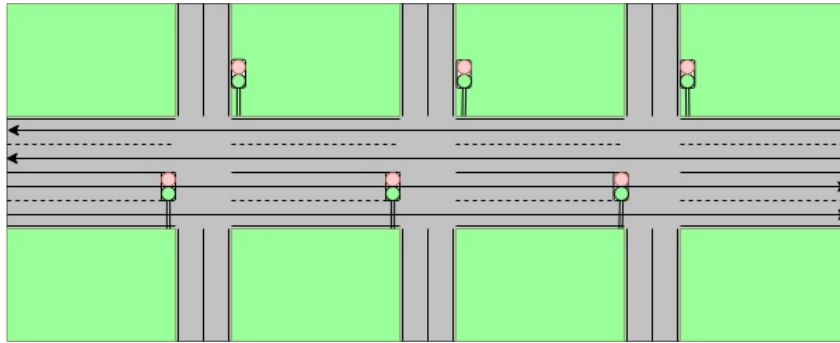


Рис. 2.10. Движение по главной дороге

Однако на практике часто встречаются ситуации с пересечением дорог одинакового приоритета движения, как на рисунке 2.11.

В таком случае уже не получится создать преимущество в движении в одном направлении без создания затруднений при проезде в перпендикулярном направлении.

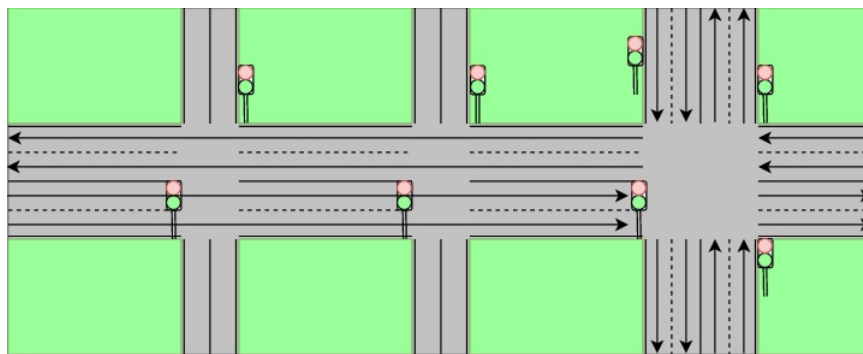


Рис. 2.11. Движение по главной дороге и перекресток с одинаковыми приоритетами движения

Однако существует возможность улучшения дорожного движения и при подъезде к светофору с одинаковыми приоритетами: если водители заранее будут предупреждены о времени включения зеленого сигнала светофора на следующем перекрестке, то можно будет задать оптимальную модель их движения. В настоящее время, по данным социологических опросов [24], 41% водителей, стартуя с перекрестка, стремится набрать максимальную скорость, при этом им всё равно придется стоять на следующем светофоре. Такое движение является неправильным в связи со следующими факторами:

- Безопасность дорожного движения. Движение на большой скорости в черте города опасно как для остальных участников дорожного движения, так и для пешеходов [25], особенно при плохих погодных условиях, что следует из описания макроскопической модели Танака.
- Создание искусственной пробки. Движение на правильной скорости позволило бы приехать на следующий перекресток без торможения перед светофором, которое создает искусственную пробку, связанную с распространением информации о стоящих впереди или тормозящих машинах-лидерах в соответствии с микроскопической моделью следования за лидером.
- Увеличенные расходы. Быстрое ускорение и торможение приводит к перерасходу топлива и скорому износу деталей автомобиля, что соответствует росту затрат автовладельца на содержание АТС.

В связи с данными проблемами, рекомендуется предупреждать водителей об оптимальном режиме движения до следующего перекрестка. Современные технологии позволяют узнать расположение автомобиля на участке дороги и даже полосе движения по GPS-навигации, а время для достижения следующего перекрестка и его проезда

на зеленый сигнал светофора легко задается с помощью модели перенастройки фаз, рассмотренной ранее. При этом сообщать информацию об оптимальной скорости движения можно с помощью навигационных программ, которыми сейчас пользуются 95% водителей. Например, такую функцию можно добавить в Яндекс.Навигатор, которым на настоящий момент, по данным Google Play [26], пользуются более 50 миллионов человек. Пример вида итогового окна информирования приведен на рисунке 2.12.

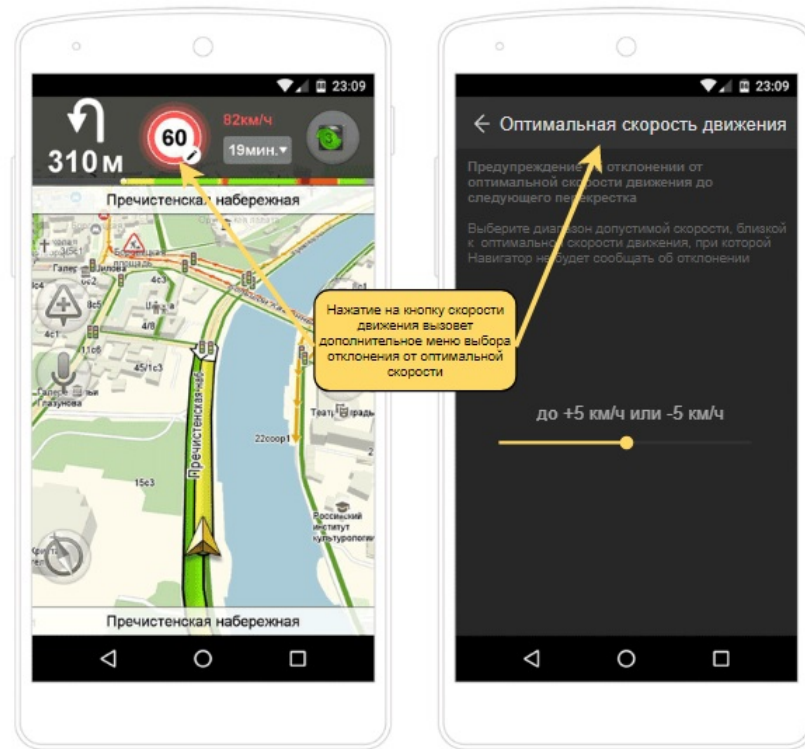


Рис. 2.12. Пример дополнения программы Яндекс.Навигатор

Для задания оптимального движения следует определить ускорение АТС до достижения оптимальной скорости, а также соответствующее время разгона и расстояние, пройденное за это время. Так при расчете ускорения автомобиля следует учитывать совокупность сил, действующих на него [27]:

$$a_a = \frac{F_{wh} - F_{air} - F_k}{m}, \quad (2.16)$$

где силы рассчитываются по следующим формулам:

$$F_{wh} = \frac{2M_{wh}}{D_{wh}}, \quad (2.17)$$

$$F_{air} = \frac{1}{2}C_a\rho_{air}S_av_a^2, \quad (2.18)$$

$$F_k = mgf_k. \quad (2.19)$$

В приведенных формулах используемые обозначения будут задавать следующие характеристики автотранспортного средства:

- $a_a$  — ускорение АТС;
- $F_{wh}$  — сила от момента  $M_{wh}$  на колесе диаметром  $D_{wh}$ ;
- $F_{air}$  — сила сопротивления воздуха с учетом коэффициента аэродинамического сопротивления автомобиля  $C_a$  с площадью лобовой поверхности  $S_a$ , движущегося со скоростью  $v_a$  при определенной плотности воздуха  $\rho_{air}$ ;
- $F_k$  — сила сопротивления качению при заданной массе автомобиля  $m$  и коэффициенте сопротивления качению  $f_k$ , где  $g$  равно ускорению свободного падения.

Тогда, выяснив показатели конкретного автомобиля [28] (расчет осуществлялся для Volkswagen Polo Sedan 1.6/81 (110)/5-МКПП), можно будет определить различные виды зависимостей. Сначала определяется зависимость ускорения и скорости при движении автомобиля на различных передачах (рисунок 2.13), далее задаются связи этих величин со временем, и, наконец, определяется зависимость между скоростью и расстоянием (рисунок 2.14), наиболее удобная для практического применения. Также стоит отметить, что полученный на рисунке 2.14 график зависимости скорости и расстояния легко аппроксимировать с помощью линейных или квадратичных функций.

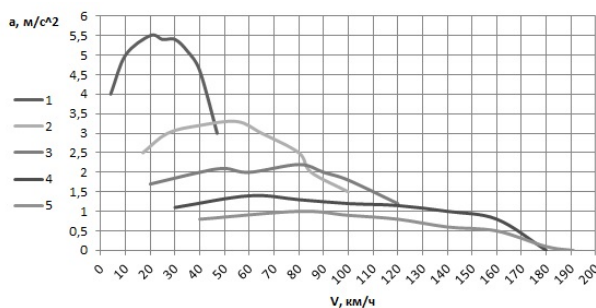


Рис. 2.13. Зависимость ускорения и скорости

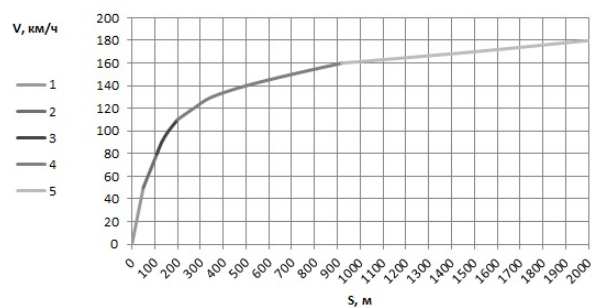


Рис. 2.14. Зависимость скорости и расстояния

Теперь, создав модель движения АТС, перейдем к рассмотрению различных вариантов движения от пройденного светофора к следующему. Для этого условно разделим их на несколько категорий и постараемся выделить из них наиболее оптимальный вариант проезда контролируемого участка.

Обозначим выделенные категории буквами  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  и рассмотрим их более подробно, представив на одном графике 2.15 движение в каждом случае:

- $A$  — движение на слишком большой скорости опасно чрезмерным ускорением и торможением, а также оно приведет к раннему приезду на перекресток до завершения фазы красного сигнала светофора  $t_r$  и простоя на светофоре с последующим распространением затора с постоянным приростом плотности  $q_+$ ;
- $B$  — в этом случае АТС вынуждено прекратить движение по достижении светофора и в тот же момент продолжить его с ускорением, что приведет к перерасходу топлива, увеличенной вероятности износа деталей и небольшому затору;
- $C$  — автомобиль проходит светофор без изменения набранной скорости движения;
- $D$  — недостаточная скорость автомобиля приведет к замедлению транспортного потока, следующего за ним.

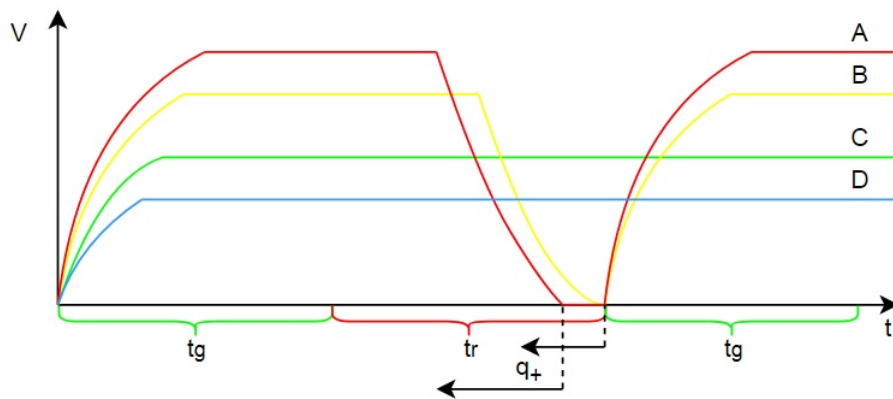


Рис. 2.15. Варианты движения АТС между светофорами

Очевидно, что оптимальным вариантом движения среди предложенных является случай  $C$ . Теперь нужно программными средствами рассчитать оптимальную скорость движения и сообщить её водителю с помощью навигационных программ. Для этого необходимо задать следующие значения и обозначения:

- длина пути между светофорами  $S_{i,i+1}$ , которую можно определить точно или приближенно как  $S = \frac{\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}}{M}$ , где  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  и  $(x_i, y_i)$  — двумерные координаты светофоров на дорожной карте, а  $M$  задает масштаб карты к метрам;
- $t_{tot_{i+1}}$  — время полного цикла работы светофора  $i + 1$ ;

- $t_{\Delta_{i,i+1}}$  — время равное разности начал циклов работы светофоров  $i$  и  $i + 1$ ;
- $V_0$  и  $V_{opt}$  — начальная и оптимальная скорости соответственно;
- $t_0$  — время начала движения со светофора  $i$ ;
- $v = f(t)$  — приближенная функциональная зависимость скорости и времени, полученная из рассмотренного ранее графика 2.13 без учета временных затрат на переключение передач;
- $S = g(v)$  — приближенная функциональная зависимость расстояния и скорости, полученная из рассмотренного ранее графика 2.14;
- $t_{opt} = \frac{g(V_{opt})}{V_{opt}}$  — время, по прошествии которого будет достигнута оптимальная скорость  $V_{opt}$ ;

Тогда можно будет рассчитать общее расстояние, полученное при выборе модели движения  $C$ , с помощью следующей формулы:

$$\begin{aligned} S_{i,i+1} &= \left| \int_{t_0}^{t_{opt}} f(t) dt \right| + V_{opt}(t_{\Delta_{i,i+1}} - t_{opt} + t_{tot_{i+1}} k) = \\ &= \left| g(V_{opt}) - g(V_0) \right| + V_{opt}(t_{\Delta_{i,i+1}} - t_{opt} + t_{tot_{i+1}} k), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где  $k \in 0 : n$  будет означать количество полных циклов светофора, прошедших за время движения автотранспортного средства к следующему перекрестку. В представленном уравнении левое слагаемое будет задавать расстояние, пройденное до достижения оптимальной скорости, тогда как правое будет определять расстояние, пройденное на оптимальной скорости до достижения следующего перекрестка по закону равномерного прямолинейного движения.

Для упрощения вычислений аппроксимируем характеристики зависимости расстояния и скорости с помощью линейной или квадратичной функции, вычислив необходимые коэффициенты для соответствующих уравнений регрессии:

$$\hat{S}_1 = 0.5545v + 12.9484, \quad (2.21)$$

$$\hat{S}_2 = -0.0022v^2 + 0.9721v + 2.0797. \quad (2.22)$$

Таким образом, выбрав определенный тип приближения и часть формулы для расчета расстояния через  $f(t)$  или  $g(v)$ , можно выразить значение  $V_{opt}$ .

**Пример 2.4.** Подставив во вторую часть уравнения 2.20 приближение линейной функцией 2.22 для  $g(v)$  получим следующую последовательность действий для задания формулы вычисления оптимальной скорости:

$$\begin{aligned}
S_{i,i+1} &= |g(V_{opt}) - g(V_0)| + V_{opt}(t_{\Delta,i,i+1} - t_{opt} + t_{tot,i+1}k); \\
S_{i,i+1} &= |0.5545V_{opt} + 12.9484 - (0.5545V_0 + 12.9484)| + V_{opt}(t_{\Delta,i,i+1} - t_{opt} + t_{tot,i+1}k); \\
S_{i,i+1} &= 0.5545|V_{opt} - V_0| + V_{opt}(t_{\Delta,i,i+1} - t_{opt} + t_{tot,i+1}k); \\
V_{opt} &= \begin{cases} \frac{S_{i,i+1} + 0.5545V_0}{t_{\Delta,i,i+1} - t_{opt} + t_{tot,i+1}k + 0.5545}, & \text{при } V_{opt} \geq V_0, \\ \frac{S_{i,i+1} - 0.5545V_0}{t_{\Delta,i,i+1} - t_{opt} + t_{tot,i+1}k - 0.5545}, & \text{при } V_{opt} < V_0. \end{cases} \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Последним шагом остается задать соответствующий алгоритм для вычисления оптимальной скорости в зависимости от параметров:

1. Определяем значения необходимых переменных  $S_{i,i+1}, t_{tot,i+1}, t_{\Delta,i,i+1}, V_0, t_0$ , а также аппроксимируем функции  $f(t), g(v)$ .
2. В цикле по  $k \in 0 : n$  вычисляем  $\lfloor V_{opt} \rfloor$  по формуле 2.23 до тех пор, пока  $\lfloor V_{opt} \rfloor$  не станет меньше  $V_{\max}$  — максимальной разрешенной скорости на рассматриваемом участке дороги. При этом значение  $n$  может варьироваться в зависимости от расположения дороги в области с большим количеством регулируемых перекрестков или в малонаселенном пункте. Если в течение работы цикла не будет определено значение  $V_{opt}$ , то принимаем его равным  $V_{\max}$ .

В результате применения данного алгоритма будет рассчитано значение оптимальной скорости движения на рассматриваемом участке дороги. Сообщить данную информацию водителю можно посредством связи расположения автомобиля по GPS-координатам относительно пройденного светофора, поскольку при известном расстоянии можно определить оптимальную скорость разгона по графику их зависимости 2.14 и дальнейшую постоянную скорость движения в соответствии с графиком 2.15. При этом можно предупреждать водителя о серьезном отклонении от оптимальной скорости посредством оповещения звуковым сигналом программы-навигатора, а норму отклонения каждый водитель сможет выбирать сам, что наглядно демонстрируется на рисунке 2.12.



# Программная реализация моделей на реальных данных

Применение предложенных ранее методов и алгоритмов должно быть продемонстрировано на конкретных реальных участках дорог для подтверждения их эффективности. Поэтому в данной главе будут рассмотрены участки дорог в Санкт-Петербурге, проезд по которым затрудняется из-за несогласованности работы светофоров. На основе алгоритмов из предыдущей главы данной работы будет составлена программа, производящая расчеты для изучаемых отрезков дорожной сети города. Полученные результаты будут сравниваться с исходными данными для доказательства эффективности применения созданных алгоритмов.

### 3.1. Тестирование моделей на реальных участках дорожной сети Санкт-Петербурга

**Пример 3.1.** В качестве первого тестируемого участка дороги возьмем отрезок Санкт-Петербургского проспекта от пешеходного светофора вблизи школы №542 до светофора на пересечении с Фабричной улицей. Фрагмент спутникового изображения рассматриваемого участка представлен на рисунке 3.1 средствами онлайн-сервиса Яндекс.Карты.

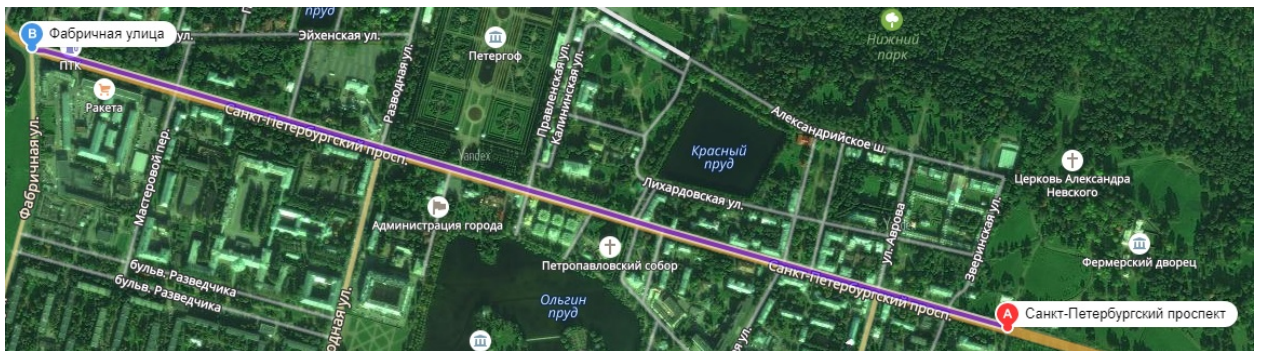


Рис. 3.1. Границы тестируемого участка Санкт-Петербургского проспекта

Отметим на тестируемом участке светофоры, количество полос и примыкающие дороги, составим наглядную схему, на основе которой будем принимать решение об использовании моделей, рассмотренных в предыдущей главе.

Всего на данном участке проспекта расположено 8 светофоров, при этом тестируемый отрезок проспекта является главным по отношению к примыкающим или пересекающим его улицам. Отметим светофоры на карте и рассчитаем расстояния между ними. Наглядно полученные результаты продемонстрированы на рисунке 3.2:



Рис. 3.2. Расположение светофоров и расстояния между ними

Тогда общая длина отрезка дороги  $S_{tot} = \sum_{i=1}^{n-1} S_{i,i+1} = \sum_{i=1}^7 S_{i,i+1} = 2.265$  км. Данные по длительности фаз работы, замеренные в режиме реального времени, а также прочие значения, необходимые для вычислений, представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Данные об участке дороги и режиме работы светофоров

№ светофора	1	2	3	4	5	6	7	8
$t_r$	27	17	25	20	28	22	28	29
$t_g$	48	33	50	30	47	53	47	46
$S_{i,i+1}$	300	220	278	314	341	472	340	—
$t_{\Delta_{i,i+1}}$	22:47	17:42	20:45	12:37	22	31	22	—

Стоит отметить, что плотность АТС на Санкт-Петербургском проспекте значительно превышает плотность автомобилей на пересекающих его улицах в любое время суток, поэтому становится актуальной настройка режимов работы светфоров для обеспечения быстрого проезда рассматриваемого участка. На основе алгоритма, продемонстрированного в разделе 2.3, была составлена программа на языке C# в среде разработки Microsoft Visual Studio 2010. Применение данных из таблицы 3.1 показало, что суммарное время простоя одного автотранспортного средства в текущем режиме

работы варьируется от 53 до 129 секунд. При этом общее время проезда заданного участка дороги без учета указаний светофора составит всего 136 секунд. Применяв алгоритм, получим следующие значения разности циклов работы соседних светофоров с синхронизированными фазами работы, где  $t_r = 24$  и  $t_g = 51$ , представленные в таблице 3.2, при которых автомобили проезжают участок без задержек на перекрестках. Благодаря применению данного алгоритма, время проезда рассматриваемого отрезка Санкт-Петербургского проспекта становится на 28.1%–48.7% меньше.

Таблица 3.2. Оптимальный режим работы светофоров

№ светофора	1	2	3	4	5	6	7	8
$t_{\Delta_{i,i+1}}$	18	13	16	18	20	28	20	—

В случае, когда нельзя перестроить режим работы светофоров, можно будет рассчитать оптимальную скорость движения на каждом отрезке пути, согласно алгоритму, предложенному в разделе 2.4. Полученные результаты представлены в таблице 3.3 с учетом максимально разрешенной скорости движения в черте города  $V_{\max} = 60$  км/ч.

Таблица 3.3. Оптимальная скорость движения на участке, ограниченном светофорами

№ светофора	1	2	3	4	5	6	7	8
$V_{opt}$	49	44	47	39	38	50	52	50

При этом стоит отметить следующее наблюдение, выявленное в течение работы алгоритма: при проезде данного участка на скорости, превышающей максимально разрешенную скорость  $V_{\max}$  на 20–30 км/ч, можно успеть проехать некоторые перекрестки на последних секундах действия зеленого сигнала светофора или на желтый сигнал. Данное наблюдение часто используют как водители личных автомобилей, так и водители маршрутного транспорта, что приводит к увеличению вероятности возникновения дорожно-транспортных происшествий.

Далее рассмотрим участок дорожной сети Санкт-Петербурга большего масштаба, расположенный уже в черте города, для которого задача моделирования и оптимизации станет более трудоемкой.



**Пример 3.2.** В качестве второго тестируемого участка возьмем отрезки двух проспектов, расположенных в Выборгском районе: Большого Сампсониевского проспекта от съезда на Боткинскую улицу, а также Лесного проспекта от пересечения улицы Комсомола с продолжением проспекта в виде улицы Академика Лебедева, и до пересечения с Кантемировской улицей у обоих проспектов. Фрагменты спутниковых изображений заданного участка представлены на рисунках 3.3 и 3.4:



Рис. 3.3. Начало тестируемого участка

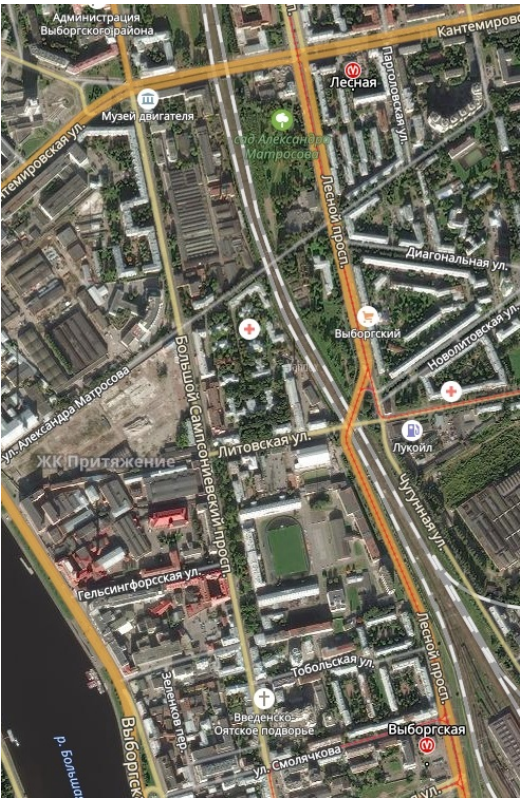


Рис. 3.4. Конец тестируемого участка

В таблицах 3.4 и 3.5 представим текущие показатели для отрезков Лесного проспекта и Большого Сампсониевского проспекта соответственно.

Таблица 3.4. Данные об участке Большого Сампсониевского проспекта

№ светофора	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t_r$	78	23	23	35	23	33	26	24	24
$t_g$	29	28	59	62	35	35	49	27	68
$S_{i,i+1}$	517	260	225	445	136	224	520	667	—

Таблица 3.5. Данные об участке Лесного проспекта

№ светофора	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_r$	66	40	42	63	25	33	33	41	27	40	39	49
$t_g$	42	60	72	57	75	73	73	63	77	69	50	65
$S_{i,i+1}$	341	311	70	125	648	133	302	219	301	507	242	—

В городских условиях следует учитывать плотности потоков автотранспортных средств и их направления движения, поэтому далее составим соответствующие схемы движения для рассматриваемых перекрестков, представленные в таблицах 3.6 и 3.7.

Таблица 3.6. Движение автомобилей на перекрестках Большого Сампсониевского проспекта

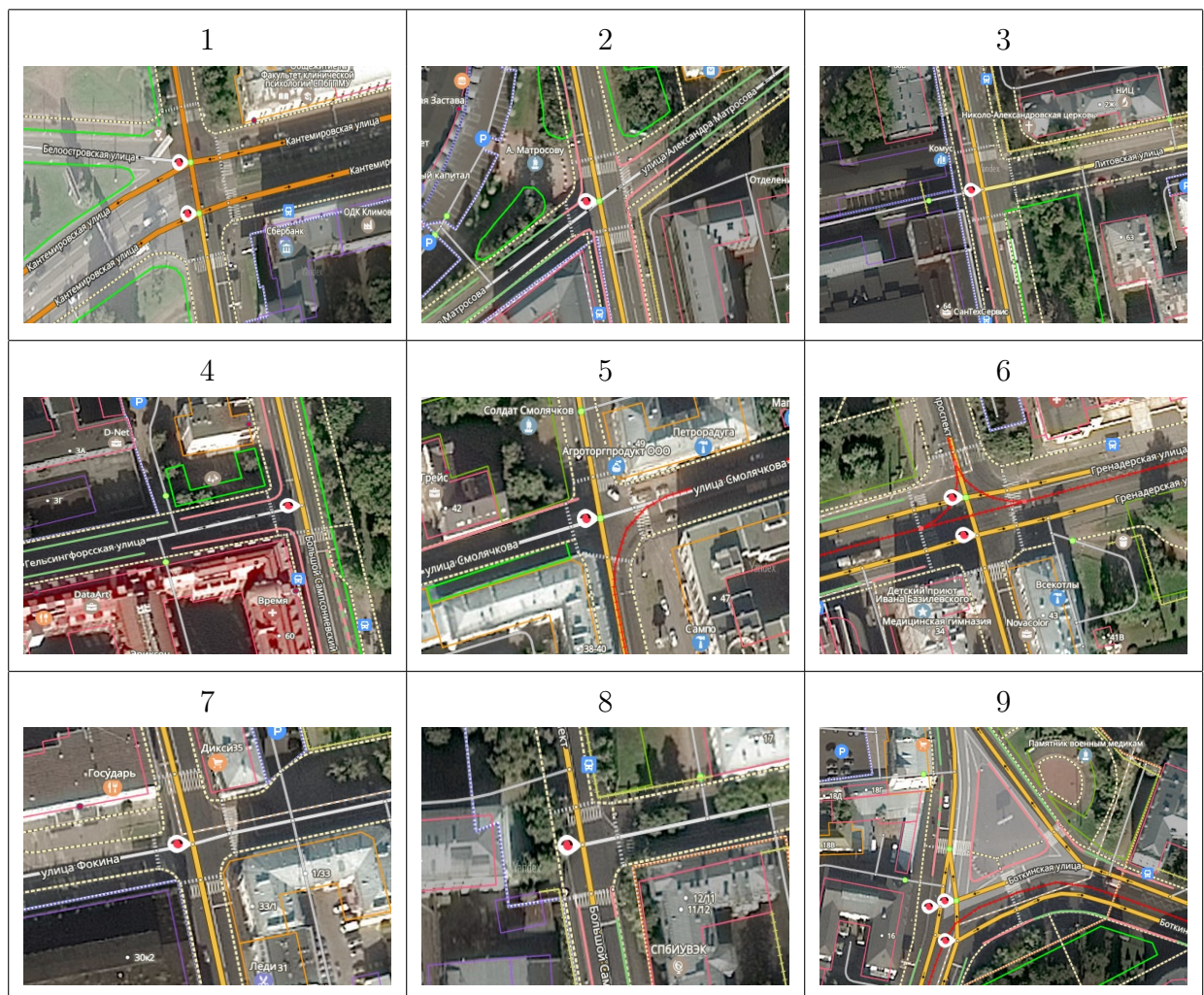
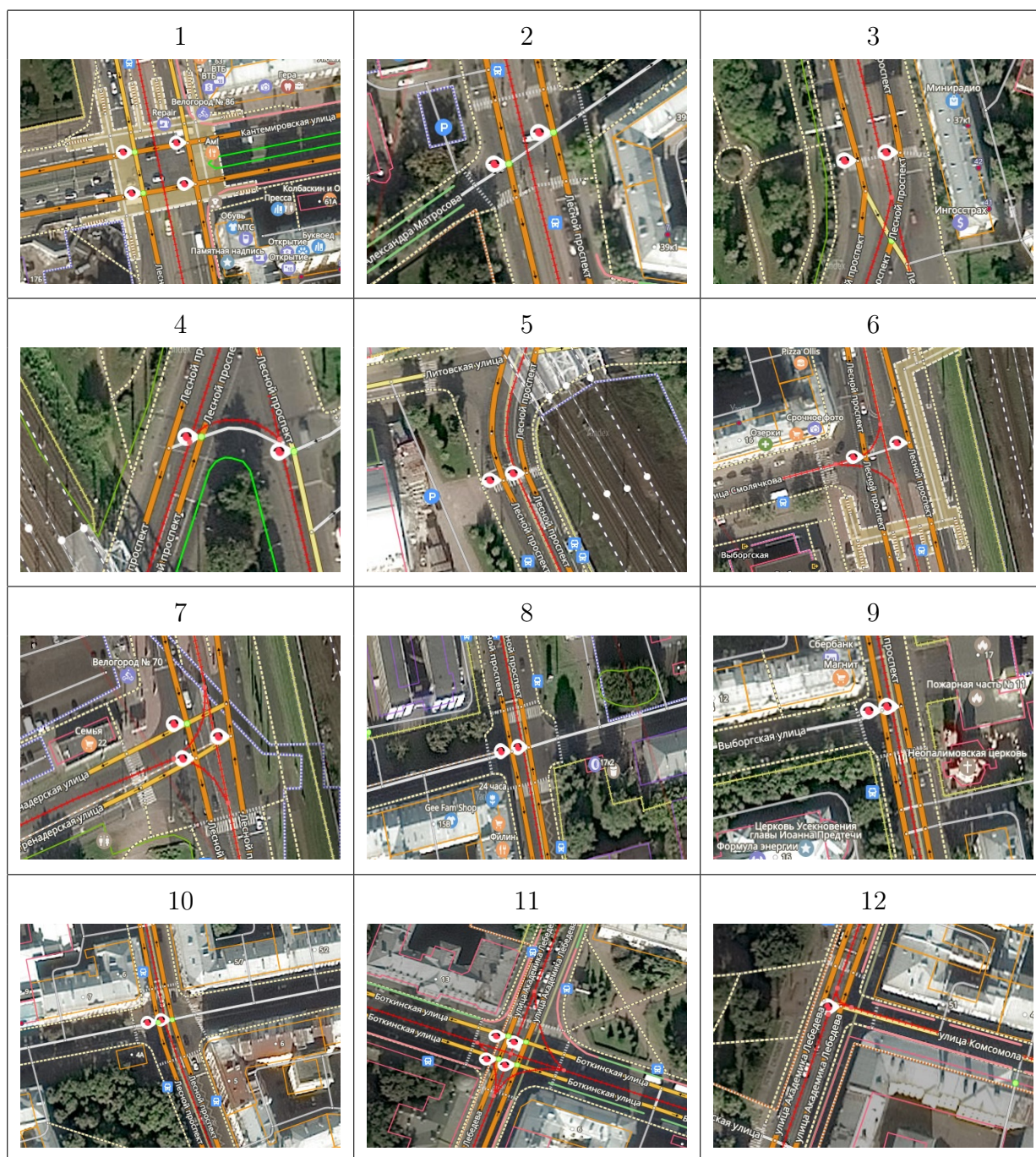




Таблица 3.7. Движение автомобилей на перекрестках Лесного проспекта



На основе собранных данных с помощью реализованной программы были получены результаты, представленные в таблицах 3.8 и 3.9. Стоит отметить, что существенные изменения в режиме проезда перекрестков 4 и 8 для Большого Сампсониевского проспекта, а также перекрестков 5 и 9 для Лесного проспекта, позволяют значительно ускорить проезд рассматриваемых участков и при этом не приводят к созданию серьез-

ных затруднений для движения автотранспортных средств по пересекающим данные проспекты направлениям.

В связи с тем, что на некоторых перекрестках (1, 6 и 9 для Большого Сампсониевского проспекта и 1, 4 и 11 для Лесного проспекта) направления движения автотранспортных средств имеют равные приоритеты, что подтверждается несущественным различием в плотности движущихся потоков, предложенные перекрестки могут разбить первоначальный тестируемый отрезок дороги на участки меньшего размера, на которых уже можно будет применить тестируемый алгоритм без существенного увеличения заторных ситуаций на пересекающих проспекты улицах. В таком случае, подъезд к этим равноприоритетным перекресткам будет регулироваться выставлением оптимальной скорости движения для автомобилей.

Таблица 3.8. Оптимальный режим для Большого Сампсониевского проспекта

№ светофора	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t_r$	75	22	24	24	23	34	24	20	23
$t_g$	34	35	57	65	35	34	51	45	69

Таблица 3.9. Оптимальный режим для Лесного проспекта

№ светофора	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_r$	64	38	42	61	21	30	30	38	23	37	41	42
$t_g$	47	63	72	59	82	75	75	62	83	70	49	70

В результате применения программы длительность проезда рассматриваемых участков уменьшилась на 6%–9%, что по времени примерно эквивалентно от 42 до 63 секунд. Данные значения уже не так существенны, как в рассмотренном ранее участке в пригороде Санкт-Петербурга, но всё же экономят время водителей.

### **3.2. Результаты применения методов улучшения пропускной способности**

Обобщение результатов применения моделей, рассмотренных в главе 2, приводит к созданию комплекса рекомендаций по улучшению дорожной ситуации в крупных населенных пунктах и мегаполисах:

- Дорожные знаки особых предписаний, оповещающие водителей о возможных вариантах движения по полосам и поворотах на перекрестке, должны ставиться не только на светофоре, но также дублироваться на расстоянии от 150 метров перед перекрестком во избежание образования пробок из-за поздних перестроений автотранспортных средств.
- Светофоры на автомагистралях, крупных проспектах и улицах, движение на которых осуществляется большим количеством АТС, должны быть синхронизированы между собой таким образом, чтобы приходящий от одного перекрестка к следующему поток автомобилей не простаивал в ожидании зеленого сигнала светофора.
- Водителям должна сообщаться оптимальная скорость движения на каждом участке дороги, ограниченном светофорами на небольшом расстоянии, во избежание аварийных ситуаций, перерасхода топлива или создания искусственной пробки из-за некорректного режима движения. Рассчитанные оптимальные значения могут предоставляться посредством установки на обочине дороги светодиодного табло с отображением рекомендуемой скорости или информирования в популярных навигационных приложениях и системах.

Применение предложенных корректировок на дорожной сети современных городов может улучшить дорожную ситуацию за счет уменьшения времени простоя автотранспортных средств в пробках и заторах, образованных перестроениями или несинхронизированной работой светофоров.

### **3.3. Актуальные задачи моделирования транспортных потоков**

Внесение корректировок и дополнений в уже существующие модели оказывает положительный эффект на дорожную ситуацию как в небольших поселениях, так и в



крупных городах и мегаполисах. Объем задач, которые ставятся перед научными сотрудниками и исследователями каждый год лишь увеличивается, при том, что в настоящее время многие известные задачи из области моделирования транспортных потоков ещё остаются нерешенными [29] .

В данной работе были рассмотрены лишь некоторые примеры проблем, возникающих при попытке оптимизации движения автотранспортных средств на регулируемых светофорами участках дороги. Однако даже учёт этих рекомендаций по улучшению состояния дорожной сети может внести существенные положительные изменения в общую дорожную ситуацию в мегаполисе.

С развитием современных технологий и ростом вычислительных мощностей, становится возможным получать всё более и более точные данные, производить сложные расчеты с учетом большого количества факторов. Так, например, анализ изображений, полученных со спутника, позволяет узнать точное число автомобилей, находящихся на рассматриваемом отрезке, в том числе отличить припаркованные автомобили от продолжающих движение. Увеличение количества камер видеофиксации на оживленных перекрестках и соответствующих систем распознавания и анализа изображений также будет сказываться на увеличении объема доступной информации для лучшего моделирования дорожной ситуации [30]. Благодаря развитию технологий и возрастающему интересу к данной сфере, современные навигационные системы могут даже продемонстрировать свободные парковочные места и проложить к ним путь, а также помочь с парковкой [31]. Дальнейшее развитие в области математического моделирования транспортных потоков приведет к заметному улучшению дорожной ситуации, а уточнение микроскопических моделей движения может привести и к полной замене водителей автотранспортных средств на роботизированные системы [32], руководствующиеся полученными данными, что, в свою очередь, будет гарантировать отсутствие дорожно-транспортных происшествий. Посильный вклад в улучшение транспортной обстановки был внесен и в данной работе при создании методов, ведущих к положительным изменениям в дорожной сети города.

## Заключение

В результате выполнения данной работы были изучены различные виды математических моделей, описывающих поведение транспортного потока, и предложены несколько новых моделей, задающих поведение автотранспортных средств при проезде перекрестка с установленным на нём светофором. На основе моделей составлены и реализованы алгоритмы и программы расчета, демонстрирующие на реальных данных выгоду применения рассмотренных методов и эвристик для улучшения транспортной ситуации в крупных городах и мегаполисах. Также составлен комплекс рекомендаций для автомобилистов и дорожных служб, включающий ряд мер, способствующих уменьшению количества заторов и пробок на дорогах города.

В заключение хочется отметить, что актуальность использования транспортных моделей на практике неуклонно растет с каждым годом. Современные реалии требуют системного подхода к процессу транспортного планирования и более согласованного взаимодействия различных структур при выработке и реализации транспортных решений. Постоянное повышение сложности и комплексности транспортных систем, особенно в крупных городах и мегаполисах, масштабность возникающих перед менеджерами и проектировщиками задач, необходимость взаимосвязанного учета колоссального количества факторов — все это обуславливает переход на новые методы транспортного планирования с применением компьютерных транспортных моделей и комплексной оценки последствий мероприятий по развитию транспортной инфраструктуры.

## Литература

1. Patriksson M. The traffic assignment problem, models and methods // VSP. — 1994. — P. 25–44.
2. Perlman C. Mathematical Modelling of Traffic Flow at Bottlenecks : Ph.D. thesis / Cathleen Perlman. — 2008. — P. 59.
3. O’Flaherty C. Transport planning and traffic engineering // Elsevier. — 2006. — P. 57–62.
4. Gomes G. Optimization problems in traffic control // Mathematical modeling of traffic flows. — Independent University of Moscow, 2015. — P. 55.
5. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / А. В. Гасников, С. Л. Кленов, Е. А. Нурминский и др. — 2010. — С. 107–122.
6. Математическое моделирование движения автотранспортных потоков методами механики сплошной среды / Н. Н. Смирнов, А. Б. Киселев, В. Ф. Никитин, А. В. Кокорева // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 4. — С. 141–155.
7. Семенов В. В. Математическое моделирование динамики транспортных потоков мегаполиса. — 2012. — С. 44.
8. Семенов В. В., Ермаков А. В. Исторический анализ моделирования транспортных процессов и транспортной инфраструктуры // Препринты ИПМ. — 2015. — Т. 3. — С. 36.
9. Швецов В. И. Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и Телемеханика. — 2003. — Т. 11. — С. 3–46.
10. Garber N. J., Hoel L. Traffic and highway engineering. — Virginia: Nelson Engineering, 2010. — P. 24–42.
11. Payne H. J. Models of freeway traffic and control // Simulation Council Proc. — 1991. — Vol. 1, no. 28. — P. 51–61.
12. Cremer M., Meissner F. Traffic prediction and optimization using an efficient macroscopic simulation tool // Modeling and Simulation. — 1993. — P. 515–519.

13. Chowdhury D., Santen L., Schadschneider A. Statistical physics of vehicular traffic and some related systems // *Phys. Rep.* — 2000. — Vol. 329. — P. 199–329.
14. Дорогуш Е. Г. Математическое моделирование транспортных потоков на кольцевой автостраде // *Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ.* — 2011. — № 8. — С. 54–68.
15. Бабков В. Ф. Дорожные условия и безопасность дорожного движения // *М.: Транспорт.* — 1982. — С. 5–24.
16. Bleile T. Traffic simulation supporting urban control system development // *4th World Congr. Intelligent Transp. Syst., Brussels: ITS Congr. Association.* — 1997. — P. 11–27.
17. Kerner B. S. Introduction to modern traffic flow theory and control // *Berlin: Springer.* — 2009. — P. 5–36.
18. Daganzo C. F. The cell transmission model, part ii: Network traffic // *Transpn. Res.* — 1995. — Vol. 29. — P. 79–93.
19. Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков / А. Б. Сухинова, М. А. Трапезникова, Б. Н. Четверушкин, Н. Г. Чубарова. — *Математическое моделирование*, 2009. — Т. 21. — С. 118–126.
20. Иносэ Х., Хамада Т. Управление дорожным движением // *М.: Транспорт.* — 1983. — С. 175–182.
21. Brackstone M., McDonald M. Car following: a historical review // *Transpn. Res.* — 2000. — Vol. 2. — P. 181–196.
22. Nagatani T. The physics of traffic jams // *Rep. Prog. Phys.* — 2002. — Vol. 65. — P. 1331–1386.
23. «ГОСТ Р 52289-2004. Национальный стандарт Российской Федерации. Технические средства организации дорожного движения. Правила применения дорожных знаков, разметки, светофоров, дорожных ограждений и направляющих устройств» (утв. Приказом Ростехрегулирования от 15.12.2004 N 120-ст) (ред. от 09.12.2013)), пункт 7.4.2.

24. Опрос посетителей сайта госавтоинспекции // Госавтоинспекция МВД России и Экспертный центр «Движение без опасности». — 2017.
25. Абрамов К. В. Социологические исследования в области безопасности дорожного движения как важнейший инструмент мониторинга и планирования государственной политики // Всероссийский центр изучения общественного мнения. — М.: 2016. — URL: [https://wciom.ru/fileadmin/file/reports\\_conferences/2016/2016-09-29-pdd.pdf](https://wciom.ru/fileadmin/file/reports_conferences/2016/2016-09-29-pdd.pdf).
26. Яндекс.навигатор – пробки и навигация по gps. — URL: <https://play.google.com/store/apps/details?id=ru.yandex.yandexnavi&hl=ru>.
27. Кленников В. М., Кленников Е. В. Теория и конструкция автомобиля / Под ред. В. А. Иларионов. — МАДТ, 1967. — С. 9–41.
28. Технические характеристики Volkswagen Polo Sedan. — URL: [http://newpolo.volkswagen.ru/docs/new\\_polo\\_kc.pdf](http://newpolo.volkswagen.ru/docs/new_polo_kc.pdf).
29. Вучек В. Р. Транспорт в городах, удобных для жизни // Территория будущего. — 2011. — С. 18–33.
30. Гудвин Ф. Решение проблемы пробок. — 2009. — URL: <http://www.polit.ru/article/2009/03/24/probki/>.
31. Evtushenko V. J., Kosenko E. Y. Automatic control systems for car parking // Technical Sciences. — 2012. — P. 112–114.
32. Сероклинов Г. В. Разработка и исследование системы автоматического управления движением автомобиля при стендовых испытаниях : Дисс. . . кандидата наук / Г. В. Сероклинов. — 1990. — С. 10–18.